

От тождественных преобразований к функциям

Программа элективного курса для учащихся 10 класса

Пояснительная записка

1. Место элективного курса в образовательном процессе.

Количество часов, отводимых на математику в школьном курсе, в частности на алгебру, за последние 10 лет сократилось на 1-2 часа в неделю. Однако, требования, предъявляемые сегодня к знаниям и умениям учащихся “на выходе” из школы, напротив, увеличились. Это можно обнаружить и в наборе компетентностей, которыми должен владеть выпускник общеобразовательной школы, и в содержании вступительных экзаменов по математике в ВУЗы.

Изменения в структуре школьного математического образования приводят к тому, что многие сложные темы в курсе основной школы, требующие серьёзного изучения, становятся “проходными”, времени на их детальное, тщательное изучение не хватает. К десятому классу, как правило, изученные вопросы отчасти забываются, что приводит к трудностям при овладении программы по математике в старшей школе, при посещении подготовительных курсов в ВУЗах, на выпускных и вступительных экзаменах.

Настоящий курс рассчитан на то, чтобы параллельно с изучением общеобразовательного курса алгебры и начал анализа в 10 классе, учащиеся повторили, систематизировали, углубили и расширили свои знания, умения и навыки по таким темам как:

- тождественные преобразования алгебраических выражений;
- алгебраические уравнения и способы их решения;
- алгебраические неравенства;
- алгебраические функции: основные определения, свойства, исследование, построение эскизов графиков.

Элективный курс предлагается для изучения учащимися естественнонаучного и математического профиля.

На изучение курса отводится 28 часов.

Практика работы показывает, что лучше всего начать курс с середины октября и закончить в декабре, предварительно изучив с учащимися тему “Многочлены одной переменной”.

Тождественные преобразования алгебраических выражений традиционно сложная для учащихся тема. Впервые сталкиваясь с ней в 7-8 классах и, заканчивая в 9 классе, учащиеся не успевают основательно изучить эти вопросы. Такие серьезные и важные аспекты как: преобразования, содержащие модуль; использование подстановок и вовсе остаются за пределами рассмотрения школьной программы. Вместе с тем, именно такие преобразования чаще всего встречаются на вступительных экзаменах, вызывая затруднения и, приводя к ошибкам. Тема “Тождественные преобразования” не требует выделения аудиторного времени для повторения теории. Необходимо актуализировать фронтальным опросом знания учащихся по формулам сокращённого умножения, свойствам степеней, определению модуля и приступить к их практическому применению при решении задач.

Тема “Алгебраические уравнения”, включённая в настоящий курс позволит систематизировать имеющиеся знания по решению алгебраических уравнений, повторить основные типы алгебраических уравнений, способы и приемы их решения, основательно разобрать способы решения уравнений, содержащих модуль, рассмотреть приёмы и способы решения уравнений с параметрами.

Достаточно провести краткий обзор теоретических вопросов: определение уравнения,

его корней, равносильных и неравносильных преобразований.

Новое осмысление учащимися темы “Алгебраические уравнения” поможет им серьезно подойти к вопросам решения трансцендентных и тригонометрических уравнений в основном курсе математики средней школы.

Повторение и систематизация знаний по теме “Алгебраические неравенства” важны не только для подготовки к экзаменам, но и как пропедевтическая работа для изучения показательных, логарифмических уравнений и неравенств, определения области допустимых значений уравнений и неравенств, нахождения промежутков знакопостоянства, монотонности функций, выпуклости и вогнутости графиков функций.

В рамках изучения этой темы можно подробно остановиться на рассмотрении неравенств, содержащих модуль, иррациональных неравенствах, которые практически не изучаются в базовом школьном курсе алгебры, и познакомиться с решением неравенств с параметрами.

Тему “Алгебраические функции” необходимо начать с основательного повторения теоретических знаний, приобретенных учащимися в курсе основной школы:

- определение функции,
- определение графика функции,
- способы задания функции,
- конкретные виды изученных функций: определение, свойства, график,
- план исследования функции,
- система координат, ее элементы.

С целью актуализации знаний учащихся представляется целесообразным провести занятие - лекцию по вопросам теории.

Практика показывает, что изучение этих вопросов в последовательности, указанной в планировании, оказывает серьезную поддержку учащимся для успешного изучения темы «Построение графиков функций при помощи производной».

2. Цели и задачи курса.

Цель курса состоит в повышении общего уровня математической подготовки учащихся старшей школы, формировании ключевых компетентностей в образовательной области «Математика».

Задачи курса:

- актуализация имеющихся знаний, умений и навыков учащихся;
- углубление в конкретные разделы курса школьной математики (усвоение новых знаний, подходов к решению);
- расширение знаний, выходящих за рамки школьной программы;
- помочь в подготовке к выпускным и вступительным экзаменам;
- развитие интеллекта, математического мышления, кругозора учащихся.

3. Результаты обучения:

Общекультурная компетентность: осознание учащимися места математического познания в системе усвоенных ими знаний.

Допрофессиональная компетентность: овладение учащимися знаниями, умениями и навыками для продолжения образования в области математики.

Функциональная грамотность: овладение познавательными средствами, различными алгоритмами, способами деятельности: умением делать выбор, анализировать, доказывать, обсуждать, дискутировать, способствующими реализации различных интеллектуальных умений.

4. Содержание курса:

Курс рассчитан на 14 учебных недель по 2 часа в неделю, всего 28 учебных часов.

Учебно- методический комплекс состоит из:

- Практическая часть: преобразование алгебраических выражений, решение уравнений и неравенств, исследование функций.
- Теоретическая часть для систематизации знаний по теме “Алгебраические функции”.
- Домашние зачётные работы.
- Литература.

Форма контроля усвоения знаний:

Определение уровня усвоения знаний и овладения умениями осуществляется при обсуждении решения прикладных задач в аудитории.

Проведение домашних контрольных работ (пятибалльная шкала оценивания) является обязательным.

Учебно - тематическое планирование курса

№	Тема	Кол-во часов
---	------	-----------------

I. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

5 часов.

I.1	Преобразование выражений, содержащих степень с натуральным показателем	1
I.2	Преобразование выражений, содержащих степень с действительным показателем	1
I.3	Использование подстановок в тождественных преобразованиях	1
I.4	Алгебраические выражения, содержащие модуль	1
I.5	Разбор и анализ домашних зачётных работ	1

II. Алгебраические уравнения.

8 часов.

II.1	Линейные уравнения; линейные уравнения, содержащие модуль; линейные уравнения с параметрами	2
II.2	Квадратные уравнения, содержащие модуль и параметры	2
II.3	Уравнения, приводимые к квадратным	1
II.4	Иррациональные уравнения	2
II.5	Разбор и анализ домашних зачётных работ	1

III. Алгебраические неравенства.

7 часов.

III.1	Алгебраические неравенства высших степеней	1
III.2	Иррациональные неравенства	2
III.3	Неравенства, содержащие модуль	2
III.4	Неравенства, содержащие параметры	2

IV. Алгебраические функции.

8 часов.

IV.1	Теоретическая часть	1
------	---------------------	---

IV.2	Исследование функций по готовым чертежам	1
IV.3	Нахождение области определения и множества значений функции	1
IV.4	Нахождение нулей функции, промежутков знакопостоянства, точек пересечения с осью ординат	2
IV.5	Построение эскизов графиков функций	2
IV.6	Итоговое зачетное занятие	1

Практическая часть

Глава I . Тождественные преобразования алгебраических выражений.

I.1. Справочный материал.

Формулы сокращенного умножения:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)=a^3-b^3$$

Свойства степени с действительным показателем

$$a^{m+n} = a^m a^n \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad a^0 = 1 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n \quad a^1 = a$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

Определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \text{ где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

I.2. Упражнения.

1.2.1. Тождественным преобразованием с использованием свойств степени с натуральным показателем и формул сокращенного умножения.

Упростить выражения:

$$1) \left(\frac{3-a}{9+a^2} - \frac{6a}{a^3 - 3a^2 + 9a - 27} \right) \left(1 + \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2} \right)$$

Решение:

$$\left(\frac{3-a}{9+a^2} + \frac{6a}{(3-a)(a^2+9)} \right) \left(\frac{a^2+2a-3}{a^2} \right) = \frac{9-6a+a^2+6a}{(9+a^2)(3-a)} * \frac{(a+1)(a-3)}{a^2} = -\frac{a+1}{a^2}$$

Ответ: $-\frac{(a+1)}{a^2}$.

$$2) \left(\frac{2}{m+n} + \frac{2m}{m^3 - n^3} \cdot \frac{m+n}{m^2 + mn + n^2} \right) * \frac{m^2 - 2mn + n^2}{8m - 4n}$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{m+n} + \frac{2m(m^2 + mn + n)}{(m^3 - n^3)(m+n)} \right) \frac{(m-n)^2}{4(2m-n)} = \left(\frac{2}{m+n} + \frac{2m}{m^2 - n^2} \right) \frac{(m-n)^2}{4(2m-n)} = \frac{(4m-2n)(m-n)^2}{(m-n)(m+n)4(2m-n)} = \\ & = \frac{m-n}{2(m+n)} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{m-n}{2(m+n)}$.

$$3) \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(\frac{6a+b}{a^2 - b^2} : \frac{6a^3 + b^3 + a^2b + 6ab^2}{2ab^2 - 2a^2b} + \frac{a+b}{a^2 + b^2} \right)$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(\frac{6a+b}{a^2 - b^2} : \frac{a^2(6a+b) + b^2(6a+b)}{2ab(b-a)} + \frac{a+b}{a^2 + b^2} \right) = \\ & = \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(\frac{(6a+b)2ab(b-a)}{(a^2 - b^2)(6a+b)(a^2 + b^2)} + \frac{a+b}{a^2 + b^2} \right) = \\ & = \frac{a^2 + b^2}{ab} * \frac{-2ab + a^2 + 2ab + b^2}{(a+b)(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}$.

$$4) \left(\frac{5}{a^2 - 2a - ax + 2x} - \frac{1}{8 - 8a + 2a^2} * \frac{10(2-a)}{x-2} \right) : \frac{25}{x^3 - 8}$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{a(a-x) - 2(a-x)} - \frac{1}{2(2-a)^2} * \frac{10(2-a)}{x-2} \right) : \frac{25}{x^3 - 8} = \\ & = \left(\frac{5}{(a-x)(a-2)} - \frac{5}{(2-a)(x-2)} \right) : \frac{25}{x^3 - 8} = \\ & = \frac{5}{a-2} * \frac{a-2}{(a-x)(x-2)} : \frac{25}{x^3 - 8} = \frac{x^2 + 2x + 4}{5(a-x)} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x^2 + 2x + 4}{5(a-x)}$.

Домашняя зачетная работа.

Упростить:

$$1) \left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3 - a - 9}{9a^4 - 1} + \frac{3a-2}{3a^2-1} \right) : \frac{a^2 + 10a + 25}{9a^4 - 1}$$

Ответ: $\frac{1}{a+5}$.

$$2) \left(\frac{2x^2y + 2xy^2}{7x^3 + x^2y + 7xy^2 + y^3} * \frac{7x + y}{x^2 - y^2} + \frac{x - y}{x^2 + y^2} \right) * (x^2 - y^2)$$

Ответ: $x + y$.

$$3) \left(\frac{2}{(m+n)^3} * \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{m^2 + 2mn + n^2} * \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) \right) : \frac{m-n}{m^3n^3}$$

Ответ: $\frac{mn}{m-n}$.

I.2.2. Тождественные преобразования с использованием свойств степени с действительным показателем.

Упростить выражение:

$$1) \frac{\frac{9}{4} - a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} + 6a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} * \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}}}$$

Решение:

$$1) \text{ числитель: } 9b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{3}{2}} = \frac{9b^{\frac{10}{3}} - a^{\frac{9}{2}}}{b^2} = \frac{\left(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}} \right)}{b^2}$$

$$2) \text{ знаменатель: } \sqrt{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2} + 6 \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} + 9b^{\frac{4}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}}}{b}$$

$$3) \frac{\left(3b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}} \right) \left(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}} \right) b^3}{b^2 \left(a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}} \right) \left(a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}} \right)} = -b$$

Ответ: $-b$.

$$2) \frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} * \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} * \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Решение: } \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)} * \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} * \frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}.$$

$$3) \left(\frac{\left(z^{\frac{2}{p}} + z^{\frac{2}{g}} \right)^2 - 4z^{\frac{2+2}{p+g}}}{\left(z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{g}} \right)^2 + 4z^{\frac{1+1}{p+g}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Решение: $\left(\frac{\left(z^{\frac{2}{p}} + z^{\frac{2}{g}} - 2z^{\frac{1+1}{p+g}} \right) \left(z^{\frac{2}{p}} + z^{\frac{2}{g}} + 2z^{\frac{1+1}{p+g}} \right)}{\left(z^{\frac{1}{p}} + z^{\frac{1}{g}} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{g}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{g}} \right)$

Ответ: $\left(z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{g}} \right)$.

$$4) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$$

Решение: $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right) - \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) = -a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$

Ответ: $b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}$.

В домашнюю зачетную работу:

$$1) \frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$$

Ответ: $a^{\frac{2}{3}}$.

$$2) \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x^2}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \right)$$

Ответ: 2.

$$3) \frac{\left(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}} \right)^2 + 4a^{\frac{m+n}{mn}}}{\left(a^{\frac{2}{m}} - a^{\frac{2}{n}} \right) \left(\sqrt[m]{a^{m+1}} + \sqrt[n]{a^{n+1}} \right)}$$

Ответ: $\frac{1}{a \left(\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{a} \right)}$.

I.2.3. Использование подстановок в тождественных преобразованиях.

Упростить выражение:

$$1) \left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

Используем подстановку: $\sqrt{\frac{a}{b}} = x$.

$$\text{Решение: } \left(\left(x - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right) \right) : \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{x^2 - 1}{x} : \frac{(x-1)^2}{x} : \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{С учетом: } \sqrt{\frac{a}{b}} : \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

$$2) 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{\sqrt{a+1}\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}}$$

Используем подстановку: $\sqrt{a-1} = x; \sqrt{a+1} = y$.

Решение:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\frac{1}{x} - \frac{y}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} : \frac{y^2 x}{x^2 y - y^2 x} = 1 - \frac{1 - xy}{x} : \frac{x-y}{xy} : \frac{xy^2}{xy(x-y)} = \\ & = 1 - \frac{(1-xy)xy * xy(x-y)}{x(x-y)xy^2} = 1 - 1 + xy = xy \end{aligned}$$

С учетом: $\sqrt{a-1}\sqrt{a+1} = \sqrt{a^2 - 1}$

$$\text{Ответ: } \sqrt{a^2 - 1}.$$

$$3) \left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}} + \frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}} - 2 \right) : \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}} \right)$$

Используем подстановку:

$$\sqrt[3]{x+y} = a; \sqrt[3]{x-y} = b$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{(a-b)^2}{ab} : \frac{a-b}{ab} = a-b;$$

$$\sqrt[3]{x+y} - \sqrt[3]{x-y}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[3]{x+y} - \sqrt[3]{x-y}.$$

$$4) \sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}} \right)$$

Подстановка: $\sqrt{x} = m; \sqrt{x-a^2} = n$

Решение:

$$\frac{m}{n} : \left(\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n} \right) = \frac{m}{n} : \frac{-4mn}{m^2 - n^2} = \frac{m^2 - n^2}{-4mn^2}$$

С учетом подстановки: $\frac{a^2}{4(a^2 - x)}$

Ответ: $\frac{a^2}{4(a^2 - x)}$.

В домашнюю зачетную работу:

$$1) \frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}$$

Ответ: $\frac{m}{2}; (m > 2; m < -2)$.

$$2) \left((1-p^2)^{\frac{1}{2}} - (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + 2(1-p^4)^{\frac{1}{2}}$$

Ответ: $\frac{2p^2}{1-p^4}$.

$$3) \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \right)^{-2} : (2-x^2 - 2\sqrt{1-x^2})$$

Ответ: $1-x^2$.

I.2.4. Тождественные преобразования выражений, содержащих модуль.

$$1) \frac{2x - x|x-1| + x|x| + 3}{|x| + x^2}$$

Решение:

$$a) x < 0, \text{ тогда } \frac{2x + x(x-1) - x^2 + 3}{x^2 - x} = \frac{x+3}{x^2 - x}$$

$$b) 0 < x < 1, \text{ тогда } \frac{2x + x(x-1) + x^2 + 3}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + x + 3}{x(x+1)}$$

$$c) x \geq 1, \text{ тогда } \frac{2x - x(x-1) + x^2 + 3}{x(x+1)} = \frac{3}{x}$$

Ответ: a) при $x < 0$: $\frac{x+3}{x(x-1)}$; b) при $0 < x < 1$: $\frac{2x^2 + x + 3}{x(x+1)}$; c) при $x \geq 1$: $\frac{3}{x}$.

$$2) \left(\frac{|x-1|}{x-1} * x^2 - 2x \frac{|x+1|}{x+1} + 2x - 4 \right) : |x-2|$$

Решение:

$$a) x < -1: (-x^2 + 4x - 4) : (-(-x-2)) = x-2$$

$$b) -1 < x < 1: (-x^2 - 4) : (-(-x-2)) = \frac{x^2 + 4}{x-2}$$

$$c) \quad 1 < x < 2: (x^2 - 4) : (- (x - 2)) = \frac{x^2 - 4}{-(x - 2)} = -(x + 2)$$

$$d) \quad x > 2: \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

Ответ: а) если $x < -1$: $x - 2$; б) если $-1 < x < 1$: $\frac{x^2 + 4}{x - 2}$; в) если $1 < x < 2$: $-(x + 2)$; г) если $x > 2$: $x + 2$.

В домашнюю зачетную работу:

$$1) \frac{|x - 1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1}$$

Ответ: а) при $x \leq 0$: $\frac{1}{1 - 3x}$; б) при $0 < x < 1$: $\frac{x + 1}{(x - 1)(3x - 1)}$, $x \neq \frac{1}{3}$; в) при $x > 1$: $\frac{1}{x - 1}$.

$$2) \frac{|x^2 - 1| + x^2}{2x^2 - 1} - \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

Ответ: а) при $x < -1$: 2; б) при $-1 < x < 1$: $x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{2x^2}{2x^2 - 1}$; в) при $x > 1$: 0.

В классе:

Упростить выражение:

$$1) \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 - 3}} = \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\frac{(a^2 - 3)^2}{4a^2}}} = (a^2 - 3) : \left| \frac{a^2 - 3}{2a} \right|$$

Ответ: 1) $2a$, если $-\sqrt{3} < a < 0$; $a > \sqrt{3}$;

2) $-2a$, если $a < -\sqrt{3}$; $0 < a < \sqrt{3}$.

$$2) \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x} = \frac{x^2 + 3}{|x|} + |x - 2|$$

Ответ: а) $-\frac{2x^2 - 2x + 3}{x}$, если $x < 0$;

б) $\frac{2x + 3}{x}$, если $0 < x \leq 2$;

в) $\frac{2x^2 - 2x + 3}{x}$, если $x > 2$.

$$3) \left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)^2 - 4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + 12 \right)^{\frac{1}{4}} : (z - 1)$$

Введем подстановку: $z + \frac{1}{z} = t$; тогда $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$

Решение:

$$1) (t^2 - 2)^2 - 4t^2 + 12 = ((t^2 - 2) - 2)^2; \left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 \right)^2 = \left(\frac{z^2 - 1}{z} \right)^4$$

$$2) \left(\left(\frac{z^2 - 1}{z} \right)^4 \right)^{\frac{1}{4}} : (z - 1) = \left| \frac{z^2 - 1}{z} \right| : (z - 1) = \frac{|z^2 - 1|}{|z| \cdot (z - 1)}$$

Ответ: 1) если $z < -1$ и $0 < z < 1$, то $-\frac{z + 1}{z}$,

2) если $-1 < z < 0$ и $z > 1$, то $\frac{z+1}{z}$.

В домашнюю зачетную работу:

1) $\sqrt{x^2 - 12x + 36} - \sqrt{x^2}$

Ответ: 1) 6, если $x < 0$;

2) $6 - 2x$, если $0 \leq x < 6$;

3) -6 , если $x \geq 6$.

2)
$$\frac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 4x}}{x^2 + 1 + 2|x|}$$

Ответ: 1) $\frac{x+1}{1-x}$, если $x < -1$;

2) $\frac{x+1}{x-1}$, если $-1 < x < 0$;

3) $\frac{x-1}{x+1}$, если $x \geq 0$.

Глава II . Алгебраические уравнения.

II.1. Теоретическая часть: основные понятия и определения.

1) Уравнением называется равенство, которое выполняется при некоторых значениях входящих в него букв. При этом буквы, входящие в уравнение могут быть неравноправны: -одни из них принимают все свои допустимые значения, их называют параметрами; -другие, значение которых надо найти (относительно которых надо решить уравнение), называются неизвестными.

Решить уравнение, значит, найти все его корни, или показать, что их нет.

2) Два уравнения называются равносильными (или эквивалентными) на данном числовом множестве, если каждый корень одного уравнения является корнем другого и наоборот. Если два уравнения не имеют решения на данном числовом множестве, то они считаются равносильными на этом множестве.

3) Теоремы о равносильности уравнений:

3.1. Если к обеим частям уравнения $F(x)=G(x)$ прибавить одну и ту же функцию $A(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях переменной, то полученное новое уравнение $F(x)+A(x)=G(x)+A(x)$ равносильно исходному.

3.2. Слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

3.3. Обе части уравнения $F(x)=G(x)$ можно умножать или делить на одну и ту же функцию $A(x) \neq 0$, имеющую смысл для любого x из области определения, в результате получатся уравнения: $F(x)*A(x) = G(x)*A(x)$ или $\frac{F(x)}{A(x)} = \frac{G(x)}{A(x)}$, равносильные исходному.

4) Неравносильные преобразования.

4.1. Сокращение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может привести к потере корней уравнения.

4.2. Посторонние корни могут появиться при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, если этот множитель при действительных значениях неизвестного обращается в ноль.

4.3. Посторонние корни могут появиться при возведении обеих частей уравнения в четную степень.

5) Если все корни уравнения $F(x)=G(x)$ являются корнями уравнения $F_1(x)=G_1(x)$, но при этом последнее уравнение имеет и другие корни, то второе уравнение является следствием первого.

6) Уравнение называют алгебраическим, если в нем над неизвестными выполняются только алгебраические операции.

II.2. Практическая часть.

II.2.1. Линейные уравнения:

Решить уравнения:

$$1) 10y+2(7y-2)=5(4y+3)+3y$$

$$10y+14y-20y-3y=15+4$$

$$y=19$$

Ответ: $y=19$.

2)

$$3(x+1)^2 + (x-4)^3 = 101 + (x-3)^3$$

$$3(x^2 + 2x + 1) - 101 = (x-3-x+4)(x^2 - 6x + 9 + x^2 - 7x + 12 + x^2 - 8x + 16)$$

$$3x^2 + 6x + 3 - 101 = 3x^2 - 21x + 37$$

$$27x = 37 + 98$$

$$x = 5$$

Ответ: $x=5$.

$$3) \frac{4t+33}{21} = \frac{17+t}{14}$$

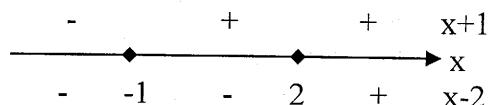
$$8t+66=51+3t$$

$$5t=-15$$

$$t = -3$$

Ответ: $t = -3$.

$$4) |x+1| - 2|x-2| = 0$$



$$1) x \leq -1$$

$$-x-1+2x-4=0;$$

$x=5$, не удовлетворяет

рассматриваемому промежутку.

Ответ: 1;5.

$$2) -1 < x \leq 2$$

$$x+1+2x-4=0;$$

$$x=1.$$

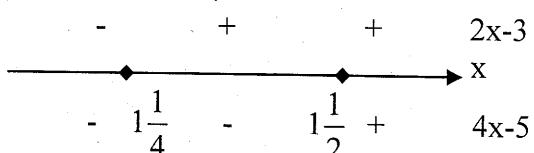
$$3) x > 2$$

$$x+1-2x+4=0$$

$$-x+5=0$$

$$x=5.$$

$$5) |2x-3| - |4x-5| = 6x-1$$



$$1)$$

$$x \leq 1\frac{1}{4};$$

$$-2x+3+4x-5=6x-1,$$

$$x = -\frac{1}{4}.$$

$$2)$$

$$1\frac{1}{4} < x \leq 1\frac{1}{2};$$

$$2x-3+4x-5-6x+1=0,$$

$$-7=0,$$

нет решений.

$$3)$$

$$x > 1\frac{1}{2};$$

$$-8x=-3,$$

$$x = \frac{3}{8},$$

не принадлежит
промежутку.

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

6) $\|x|-1|-1|=1$

$$\|x|-1|-1=1,$$

$$\|x|-1|=2, \quad |x|-1=-1,$$

$$|x|-1=2, \quad |x|=-1,$$

$x=\pm 3$. нет решения.

$$\|x|-1|-1=-1,$$

$$\|x|-1|=0,$$

$$|x|-1=0,$$

$x=\pm 1$.

Ответ: $-3;-1;1;3$.

7) $ax=a^2$

1. если $a=0$, то $0x=0^2$, т.е. $0=0$, x -любое действительное число;

2. если $a \neq 0$, $ax=a^2$, $x=a$.

Ответ: 1) x -любое, при $a=0$,

2) $x=a$, при $a \neq 0$.

8) $a(x+2)=3x+4$;

$$ax+2a=3x+4,$$

$$x(a-3)=4-2a$$

1. если $a-3=0$, $a=3$, то $0x=4-2*3$, $0x=-2$, решений нет.

$$2. a \neq 3, x = \frac{4-2a}{a-3}.$$

Ответ: 1. при $a=3$, решений нет,

$$2. \text{ при } a \neq 3, x = \frac{4-2a}{a-3}.$$

9) $a^2x+3=x+2a^2+a$

$$x(a^2-1)=2a^2+a-3$$

1. если $a^2=1$, $a=\pm 1$;

a) $a=1$: $0*x=0$, x -любое действительное число;

b) $a=-1$: $0*x=-2$, решений нет.

$$2. a^2-1 \neq 0, a \neq \pm 1; x = \frac{2\left(a - \frac{3}{2}\right)(a-1)}{(a-1)(a+1)}; x = \frac{2\left(a - \frac{3}{2}\right)}{a+1}.$$

Ответ: 1) x -любое действительное число, при $a=1$,

2) решений нет, при $a=-1$,

$$3) \text{ при } a \neq \pm 1; x = \frac{2a-3}{a+1}.$$

В домашнюю зачетную работу:

Решить уравнение:

1) $(x-3)(x-4)-2(3x-2)=(x-4)^2$

Ответ: 0.

2) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

3) $|5x-13|-|6-5x|=7$.

4) $\|x-1|+3|=3$.

5) Решить относительно x с параметром a .

$$a) \frac{a+3}{a+2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{(a+2)x} \quad (\text{подстановка } \frac{1}{x} = t)$$

Ответ: 1) при $a=-2$ уравнение смысла не имеет;
2) при $a=-3, a=0,5$, решений нет;

$$3) \quad \text{при } a \neq -3; a \neq -2; a \neq 0,5; x \neq 0: x = \frac{2a+1}{a+3}.$$

II.2.2. Уравнения, приводимые к квадратным.

Решить уравнения:

$$1) \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2 + 10x}{x^4 - 1} - \frac{4x^2 + 21}{x^3 + x^2 + x + 1}; x \neq \pm 1.$$

Решение:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2 + 10x}{x^4 - 1} + \frac{4x^2 + 21}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$x+1 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 10x - 4x^3 - 21x + 4x^2 + 12$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0,$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

$$2) (x^2 - 2x - 1)^2 + 3x^2 - 6x - 13 = 0$$

Решение:

$$\text{Введем замену: } x^2 - 2x - 1 = a$$

$$a^2 + 3a - 10 = 0, a = -5; a = 2$$

$$x^2 - 2x - 1 = -5$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D < 0,$$

$$x = -1; x = 3$$

корней нет.

Ответ: -1; 3.

$$3) (x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=63$$

Решение:

$$((x-2)(x+7)) * ((x+1)(x+4)) = 63;$$

$$(x^2 + 5x - 14) * (x^2 + 5x + 4) = 63;$$

$$x^2 + 5x - 5 = y;$$

$$(y - 9)(y + 9) = 63; y^2 - 144 = 0; y = \pm 12.$$

$$x^2 + 5x - 5 = 12$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2}$$

$$x^2 + 5x - 5 = -12$$

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$D < 0,$$

нет корней.

$$\text{Ответ: } \frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2}.$$

$$3) 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1; x \neq 0.$$

Решение:

$$x + \frac{1}{x} = t; x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; 2t^2 - 3t - 5 = 0; t = -1; t = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = -1; x^2 + x + 1 = 0, D < 0;$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}; 2x^2 - 5x + 2 = 0; x = 2; x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}, 2$.

$$4) (x^2 + 2x)^2 - (x + 2)(2x^2 - x) = 6(2x - 1)^2$$

Решение:

$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x)(2x - 1) - 6(2x - 1)^2 = 0; x \neq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{x^2 + 2x}{2x - 1}\right)^2 - \frac{x^2 + 2x}{2x - 1} - 6 = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x - 1} = a;$$

$$a^2 - a - 6 = 0; a = 3; a = -2$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x - 1} = -2; x^2 + 6x - 2 = 0; x = -3 \pm \sqrt{11};$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x - 1} = 3; x^2 - 4x + 3 = 0; x = 3; x = 1.$$

Ответ: $-3 - \sqrt{11}; 1; -3 + \sqrt{11}; 3$.

$$5) \frac{x^2 + 4}{x} + \frac{x}{x^2 + 3x + 4} + \frac{11}{2} = 0, x \neq 0$$

Решение:

$$x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x + \frac{4}{x} + 3} + \frac{11}{2} = 0; x \neq 0$$

$$x + \frac{4}{x} = y;$$

$$y + \frac{1}{y+3} + \frac{11}{2} = 0;$$

$$2y^2 + 6y + 11y + 33 + 2 = 0;$$

$$2y^2 + 17y + 35 = 0; y = \frac{-17 \pm 3}{4}; y = -5; y = -3,5.$$

$$x + \frac{4}{x} = -5; x^2 + 5x + 4 = 0; x = -1; x = -4;$$

$$x + \frac{4}{x} = -3,5; x^2 + 3,5x + 4 = 0; D < 0,$$

действительных корней нет.

Ответ: $-4; -1$.

В домашнюю зачетную работу:

$$1) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2,5$$

Ответ: -1.

$$2) 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$$

Ответ: 2; $\frac{1}{2}$.

$$3) 8x^4 + x^2 + 64x + 8 = 0$$

Ответ: $-\frac{1}{8}; -2$.

$$4) \frac{z^2 - z}{z^2 - z + 1} - \frac{z^2 - z + 2}{z^2 - z - 2} = 1$$

Ответ: 0; 1.

Иррациональные уравнения:

$$1) 2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} = 2$$

В левой части сумма двух возрастающих функций, в правой части постоянная функция, следовательно, уравнение может иметь не более одного корня.

Очевидно, что $x=3$ корень уравнения.

Ответ: 3.

2)

$$\frac{1}{2\sqrt{3x-2}-3} + \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}-1} = 3;$$

$$\sqrt{3x-2} = t.$$

$$\frac{1}{2t-3} + \frac{t}{t-1} = 3;$$

$$t-1 + 2t^2 - 3t = 3(2t^2 - 3t - 2t + 3)$$

$$2t^2 - 2t - 1 - 6t^2 + 15t - 9 = 0; -4t^2 + 13t - 10 = 0; 4t^2 - 13t + 10 = 0; t = 2; t = \frac{5}{4}.$$

$$\sqrt{3x-2} = 2; 3x-2 = 4; x = 2.$$

$$\sqrt{3x-2} = \frac{5}{4}; 3x-2 = \frac{25}{16}; 3x = \frac{57}{16}; x = \frac{19}{16}.$$

Проверка:

$x=2$: левая часть $\frac{1}{2\sqrt{6-2}-3} + \frac{\sqrt{6-2}}{\sqrt{6-2}-1} = \frac{1}{4-3} + \frac{2}{1} = 3$; правая часть равна 3; левая часть равна правой, значит $x=2$ корень уравнения.

$$x = \frac{19}{16}; \text{ левая часть } \frac{1}{2\sqrt{\frac{25}{16}-3}} + \sqrt{\frac{25}{16}} : \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 \right) = -2 + \frac{5}{4} : \left(\frac{5}{4} - 1 \right) = -2 + 5 = 3.$$

Ответ: $1\frac{3}{16}; 2$.

$$3) \sqrt{2x+5} + \sqrt{5x+6} = \sqrt{12x+25};$$

$$2x + 5 + 2\sqrt{10x^2 + 37x + 30} + 5x + 6 = 12x + 25;$$

$$2\sqrt{10x^2 + 37x + 30} = 5x + 14;$$

$$40x^2 + 148x + 120 - 25x^2 - 140x - 196 = 0;$$

$$15x^2 + 8x - 76 = 0;$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{1156}}{15}; x = 2; x = -2 \frac{8}{15}.$$

В результате проверки выяснили, что корень $x = -2 \frac{8}{15}$ посторонний.

Ответ: 2.

$$4) \sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1;$$

$$\sqrt{x-2-4\sqrt{x-2}+4} - \sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1} = 1; \sqrt{x-2} = t.$$

$$|t-2| - |t-1| = 1;$$

1. $t < 1$; $-t+2+t-1=1$; $1=1$; $t < 1$.
2. $1 \leq t \leq 2$; $-t+2-t+1=1$; $2t=2$; $t=1$.
3. $t > 2$; $t-2-t+1=-1$; $-2=0$; нет решений.

Решением уравнения будут все t , удовлетворяющие неравенству $t \leq 1$; $\sqrt{x-2} \leq 1$; $2 \leq x \leq 3$.

Ответ: [2;3]

$$5) \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{x}{2}; x \geq 2$$

$$\frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2}{(x+2)-(x-2)} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{x+2+2\sqrt{x^2-4}+x-2}{4} = \frac{x}{2};$$

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 4} = 2x;$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0;$$

$$x = \pm 2$$

с учетом условия $x \geq 2$: $x = 2$.

Ответ: 2.

В домашнюю контрольную работу:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}; \text{ Ответ: } -1.$$

$$2) \sqrt{\frac{x+4}{x}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1; \text{ Ответ: } 1\frac{1}{3}.$$

$$3) \frac{4}{\sqrt[3]{x+2}} + \frac{\sqrt[3]{x+3}}{5} = 2; \text{ Ответ: } 8; 27.$$

$$4) \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1+\sqrt{x+7}} = 4; \text{ Ответ: } 2.$$

Глава III. Алгебраические неравенства.

III. 1. Теоретическая часть. Выражения вида $a < b$ называют неравенствами, причем a и b могут быть числами или функциями. Знаки « $<$ »; « $>$ » называют знаками строгого неравенства, а « \leq »; « \geq » - знаками нестрогого неравенства. Неравенства, содержащие только числа, называют числовыми неравенствами. Если неравенства содержат буквенные выражения, то они являются верными только при определенных значениях входящих в

него букв.

Основные свойства неравенств:

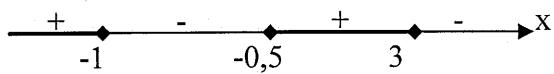
- 1) Если $a > b$, то $b < a$.
- 2) Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.
- 3) Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
- 4) Если $a + b > c$, то $a - c > -b$.
- 5) Если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$.
- 6) Если $a > b$, $c < 0$, то $ac < bc$.

III. 2. Практическая часть.

Решить неравенства:

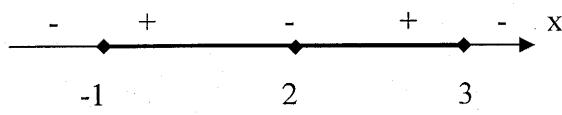
$$1) \frac{5x+1}{x-1} > 2x+2;$$

$$\frac{5x+1-2(x^2-1)}{x+1} > 0; \frac{5x+1-2x^2+2}{x+1} > 0; -\frac{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+1} > 0;$$



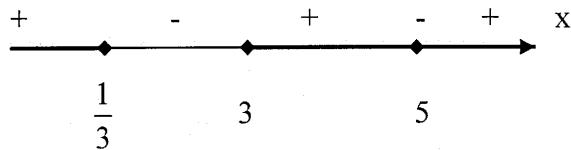
$$\text{Ответ: } (-\infty; -1); \left(-\frac{1}{2}; 3\right).$$

$$2) (x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$$



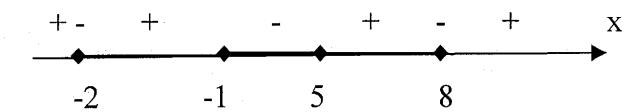
$$\text{Ответ: } (-1; 2); (2; 3).$$

$$3) \frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} \geq 0; \frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-5)^2} \geq 0;$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]; [3; 5); (5; +\infty).$$

$$4) \frac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(x-5)} \leq 0; \frac{(x+1)(x-8)^4}{(x+2)^2(x-5)} \leq 0;$$



$$\text{Ответ: } [-1; 5]; \{8\}.$$

$$5) x+1 + |x^2 - x - 3| < 0;$$

$$\text{a)} \begin{cases} x^2 - x - 3 \geq 0, \\ x^2 - 2 < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \geq 0, \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 4 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) < 0, \\ (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $-2 < x < 1 - \sqrt{5}$.

Замечание: полезно чертить отдельно ось и отмечать промежутки для каждого из неравенств системы и только потом объединять решения на общей оси, т.к. с этим связано наибольшее число ошибок, допускаемых учащимися.

$$6) 1,5x - |x| + |2x - 4| \geq 4$$

$$\text{a)} \begin{cases} x < 0, \\ 1,5x + x + 4 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ 0,5x \geq 0. \end{cases} \quad x = 0.$$

$$6) \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 1,5x - x + 4 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -1,5x \geq 0. \end{cases} \quad x = 0.$$

$$\text{b)} \begin{cases} x \geq 2, \\ 1,5x - x + 2x - 4 \geq 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2,5x \geq 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq 3,2. \end{cases} \quad x \geq 3,2.$$

Ответ: $\{0\}; [3,2; +\infty)$.

$$7) |x - 3| + |x + 1| \leq |\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} + 3|$$

$$\text{a)} \begin{cases} x < -1, \\ 3 - x - x - 1 \leq 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ -2x \leq 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -1, \end{cases} \quad x = -1.$$

$$6) \begin{cases} -1 \leq x < 3, \\ -x + 3 + x + 1 \leq 4. \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 3, \\ 4 \leq 4. \end{cases} \quad x - \text{любое число из промежутка } [-1; 3)$$

$$\text{b)} \begin{cases} x \geq 3, \\ x - 3 + x + 1 \leq 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 3. \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: $[-1; 3]$.

$$8) |x - 1 - x^2| < |3x - x^2 - 4|;$$

$3x - x^2 - 4 < 0; x - 1 - x^2 < 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно следующему: $x^2 - x + 1 < x^2 - 3x + 4$
 $x < 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1,5)$.

В домашнюю контрольную работу:

$$1) \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \geq 1; \text{ Ответ: } [-0,5; 1); (1; +\infty).$$

- 2) $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2 + 7x + 12} \leq 1$; Ответ: $(-4; -3); [2, 5; +\infty)$.
 3) $(2x^2 - 5x + 3)(3 - x^2) < 0$; Ответ: $(-1; \sqrt[3]{3}) \cup (1, 5; +\infty)$.
 4) $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$; Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{x+18} < 2-x$

$$\begin{cases} x+18 \geq 0, \\ 2-x > 0, \\ x+18 < (2-x)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -18, \\ x < 2, \\ x+18 < 4-4x+x^2. \end{cases} \quad \begin{cases} -18 \leq x < 2, \\ (x+2)(x-7) > 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-18; -2)$.

2) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} > x + 2$

Ответ: $(-\infty; -1\frac{1}{7}]$.

3) $\begin{cases} (x-1)\sqrt{6+x-x^2} \geq 0 \\ (x-1)\sqrt{(3-x)(x+2)} \geq 0 \end{cases}$

Ответ: $\{-2\} \cup [1; 3]$.

4) $\frac{x}{2x-3} + 3\sqrt{\frac{x}{2x-3}} \geq 4$; $\sqrt{\frac{x}{2x-3}} = t$; $t \geq 0$, решим введением новой переменной.

Ответ: $(1, 5; 3]$.

В домашнюю контрольную работу:

1) $\sqrt{2x-1} < x-2$; Ответ: $(5; +\infty)$.

2) $\sqrt{x^2 + 1} > 1$; Ответ: $(-\infty; -1]$.

3) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$; Ответ: $(-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Глава IV. Алгебраические функции.

IV. 1. Теоретическая часть: основные понятия, определения, план исследования.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x (аргумента или независимой переменной), если при заданном значении x , величина y принимает одно определенное значение. Обозначается $y=f(x)$.

Основные способы задания функций:

- 1) аналитический;
- 2) табличный;
- 3) графический;
- 4) описательный.

При исследовании функции следует указывать:

- 1) Область определения функции – значения, которые может принимать аргумент x ;
- 2) Множество (область) значений функции – значения, которые может принимать y ;
- 3) Четность: функция называется четной, если $f(-x)=f(x)$; нечетной, если $f(-x)=-f(x)$. Если же $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq-f(x)$, то функция не обладает свойствами четности и нечетности.
- 4) Периодичность функции: функция называется периодичной, если существует число T называемое периодом, отличное от нуля, такое что $f(x+T)=f(x)$.
- 5) Нули функции: точки пересечения с осью абсцисс; точки пересечения с осью ординат.
- 6) Промежутки знакопостоянства: промежутками знакопостоянства называются промежутки, на которых функция сохраняет свой знак. Необходимым (не достаточным)

условием смены знака функции является наличие нуля или точки разрыва.

7) Промежутки монотонности функции (возрастания и убывания):

- функция возрастает, если большему значению функции соответствует большее значение аргумента;

- функция убывает, если большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

8) Экстремумы: максимумы и минимумы функции, которые (нестрого) можно определить следующим образом:

- максимум функции – это значение в такой точке, в которой это значение является наибольшим в любой, сколь угодно малой окрестности этой точки;

- минимум функции – это значение функции в такой ее точке, в которой это значение является наименьшим в любой, сколь угодно малой окрестности этой точки.

9) Промежутки выпуклости и вогнутости функции:

- функция является выпуклой на некотором промежутке, если в любой точке этого промежутка касательная к графику функции лежит выше графика;

- функция является вогнутой на некотором промежутке, если в любой точке этого промежутка касательная к графику функции лежит ниже графика.

10) Точки перегиба функции: точки, в которых функция изменяет направление выпуклости.

11) Асимптоты: асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается график, имеющий бесконечную ветвь, по мере удаления ее в бесконечность. Различают: вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

IV.2. Практические задания:

1. Установить ООФ:

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Решение: $x^2 - 1 \neq 0, x \neq 1$ следовательно ООФ: $(-\infty; -1); (-1; 1); (1; +\infty)$.

$$2) y = \sqrt{1 - x^2}; 1 - x^2 \geq 0; x^2 \leq 1; \text{т.е. } -1 \leq x \leq 1; \text{ ООФ: } [-1; 1]$$

$$3) y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}; x \geq -1; x \geq 1; \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x-1}; \text{ ООФ: } [1; +\infty)$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}; x \geq 0; x \geq -1; x \geq 2; \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x-2}; \text{ ООФ: } [2; +\infty)$$

$$5) y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \frac{x-1}{x+1} \geq 0; \text{ следовательно, ООФ: } (-\infty; -1); [1; +\infty)$$

$$6) y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2}}; \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} \geq 0; \frac{(x-2)(x-3)}{x^2} \geq 0; \text{ ООФ: } (-\infty; 0); (0; 2]; [3; +\infty)$$

На дом: Установить ООФ:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$; Ответ: $[2; 3]$

b) $y = \sqrt{(3 - 2x - x^2)^{-1}}$; Ответ: $(-3; 1)$.

c) $y = \sqrt{\frac{-2x^2 + 5x + 3}{x+1}}$; Ответ: $(-\infty; -1); \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

2. Установить МЗФ:

1) $y = 3x - 2$;

Решение: $y + 2 = 3x; x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$; МЗФ: y -любое число.

$$2) y = \frac{3}{x} - 1; y + 1 = \frac{3}{x}; x(y+1) = 3; x = \frac{3}{y+1}; \text{МЗФ: } y \neq -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$.

$$3) y = \frac{3}{x-2} - 4;$$

$$y + 4 = \frac{3}{x-2}; (y+4)(x-2) = 3; x-2 = \frac{3}{y+4}; x = \frac{3}{y+4} + 2. \text{ МЗФ: } y \neq -4.$$

Ответ: $(-\infty; -4); (-4; +\infty)$.

$$4) y = \frac{2x-1}{x+1};$$

$$y(x+1) = 2x-1;$$

$$yx + y - 2x = -1;$$

$$(yx - 2x) = -1 - y; x = \frac{-1 - y}{y - 2}; x = \frac{y+1}{2-y}.$$

МЗФ: $y \neq 2$.

Ответ: y -любое число, кроме 2.

$$5) y = x + \frac{1}{x};$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}; x^2 + 1 = yx; x^2 - xy + 1 = 0.$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

т.е. $y^2 - 4 \geq 0$. МЗФ: $y \leq -2; y \geq 2$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

$$6) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1};$$

$$y(x^2 + 1) = x^2 + 2x + 1; (y-1)x^2 + 2x + (y-1) = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (y-1)^2}}{y-1}.$$

МЗФ: $0 \leq y < 1; 1 < y \leq 2$.

Если $y=1$, то уравнение $y(x^2 + 1) = x^2 + 2x + 1$ имеет корень: $x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1; 2x = 0; x = 0$; т.е. y может быть равен 1, тогда МЗФ: $0 \leq y \leq 2$.

Ответ: $[0; 2]$

В домашнюю контрольную работу:

Установить МЗФ:

$$1) y = \frac{0,5}{x}; \text{ Ответ: } (-\infty; 0); (0; +\infty).$$

$$2) y = \frac{-2}{x+5} + 1; \text{ Ответ: } (-\infty; -1); (-1; +\infty).$$

$$3) y = \frac{x+2}{x-3}; \text{ Ответ: } (-\infty; 1); (1; +\infty).$$

Замечание: упражнения по определению множества значений функции могут быть использованы при изложении материала об обратных функциях.

3. Определить четность функции:

$$1) y = 3x^2 - 4x^4 + 2$$

Решение: $y(-x) = 3(-x)^2 - 4(-x)^4 + 2 = 3x^2 - 4x^4 + 2; y(-x) = y(x)$ – четная.

$$2) y = 3x^2 - 4x^3 + 2$$

Решение: $y(-x) = 3(-x)^2 - 4(-x)^3 + 2 = 3x^2 + 4x^3 + 2 = -(-3x^2 - 4x^3 - 2); y(-x) \neq y(x)$ – не четная;

$y(-x) \neq -y(x)$ – не нечетная.

Ответ: функция не обладает свойствами четности и свойствами нечетности.

$$3) 3x^3 - 4x + 2$$

Решение: $y(-x) = 3(-x)^3 - 4(-x) + 2 = -3x^3 + 4x + 2 = -(3x^3 - 4x - 2)$

$y(-x) \neq y(x)$ – не четная;

$y(-x) \neq -y(x)$ – не нечетная.

Ответ: не обладает свойствами четности и нечетности.

$$4) y = 3x^3 - 4x^5 + 2x$$

Решение: $y(-x) = 3(-x)^3 - 4(-x)^5 + 2(-x) = -3x^3 + 4x^5 - 2x = -(3x^3 - 4x^5 + 2x)$

$y(-x) = -y(x)$ – нечетная.

$$5) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Решение: $y(-x) = \sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

$y(-x) = y(x)$ – четная.

$$6) y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$$

Решение: $y(-x) = \sqrt{1-x+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$

$y(-x) = -y(x)$ – нечетная.

В домашнюю контрольную работу:

Установить четность функций:

$$1) y = 3x^2 + \frac{1}{x^4} \quad \text{четная.}$$

$$2) y = 3x + \frac{1}{x^3} \quad \text{нечетная.}$$

$$3) y = x^4 - 2x^2 + 3 \quad \text{четная.}$$

$$4) y = x^3 - 5x - 1 \quad \text{нечетная.}$$

4. Определение нулей функции и промежутков постоянства ее знака.

Определить нули функции и промежутки знакопостоянства:

$$1) y = \frac{x-1}{x+2}$$

Решение:

$$\text{ООФ: } x \neq -2; \frac{x-1}{x+2} = 0; x = 1;$$

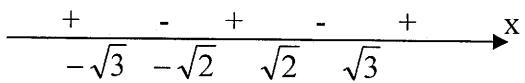
Ответ: а) ноль функции 1;

б) функция положительна при $x < -2; x \geq 1$; функция принимает отрицательные значения при $-2 < x < 1$.

$$2) y = x^4 - 5x^2 + 6$$

Решение: $y = x^4 - 5x^2 + 6$, пусть $x^2 = t$, рассмотрим выражение $t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$, обратная подстановка $(x^2 - 3)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, очевидно нулями функции будут $x = \pm\sqrt{3}; x = \pm\sqrt{2}$.

$$y = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$



Ответ: а) нули функции $x = \pm\sqrt{3}; x = \pm\sqrt{2}$;

б) функция принимает положительные значения при x из промежутков $(-\infty; -\sqrt{3}); (-\sqrt{2}; \sqrt{2}); (\sqrt{3}; +\infty)$; функция принимает отрицательные значения при x из промежутков $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2}); (\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

3) $y = x^4 + 15x^2 + 2x^3 + 14x + 24$

Решение: $P_4(x) = x^4 + 15x^2 + 2x^3 + 14x + 24 = x^4 + 2x^2x + 14x^2 + 14x + 24 =$

$(x^2 + x)^2 + 14(x^2 + x) + 24; x^2 + x = t$; дополним до полного квадрата:

$t^2 + 14t + 49 - 49 + 24 = (t + 7)^2 - 25 = (t + 7 - 5)(t + 7 + 5) = (t + 2)(t + 12)$; обратной

подстановкой получаем: $P_4(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x + 12)$, т.к. дискриминанты каждого из полученных квадратных трехчленов отрицательны, то функция: $y = x^4 + 15x^2 + 2x^3 + 14x + 24$ не имеет корней и принимает только положительные значения.

Ответ: а) нулей нет;

б) функция положительна при любых значениях x .

4) $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

Решение: $P_3(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$, заметим, что $P_3(-1) = -1 + 4 - 5 + 2 = 0$; используем схему Горнера для определения остальных корней многочлена:

	1	4	5	2
	↓	-1	-3	-2
-1	1	3	2	0

$P_3(x) = (x + 1)^2(x^2 + 3x + 2); x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$P_3(x) = (x + 1)^2(x + 2)$; следовательно исходная функция может быть записана в виде $y = (x + 1)^2(x + 2)$.

Ответ: а) нули функции: $-2; -1$;

б) функция принимает отрицательные значения при $x < -2$; положительные при $-2 < x < -1; -1 < x < +\infty$.

5) $y = 5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$

В домашнюю контрольную работу:

Найти нули и промежутки знакопостоянства функций:

а) $y = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Ответ: а) нули: $-1; 2; \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$; б) $y > 0$ при x из промежутков

$(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{4}); (-1; \frac{1 + \sqrt{33}}{4}); (2; +\infty)$; $y < 0$ при x из промежутков $(\frac{1 - \sqrt{33}}{4}; -1); (\frac{1 + \sqrt{33}}{4}; 2)$.

б) $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

Ответ: а) нули: $-1; 2 \pm \sqrt{3}$; б) $y > 0$, при x из промежутков $(2 - \sqrt{3}; 1); (2 + \sqrt{3}; +\infty)$; $y < 0$, при x из промежутков $(-\infty; 2 - \sqrt{3}); (1; 2 + \sqrt{3})$.

5. Исследовать функцию по ее графику.

Для работы в классе и в домашнюю зачетную работу подобрать графики функций, эскизы которых могут быть построены в 11 классе.

Литература

1. Балашов М.И. Экзаменационные задачи по алгебре 9 класс. 1 и 2 части. – СПб.: Дидактика, 1995.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: В.Ш., 2000.
3. Белоненко Т.В., Васильева Н.И. Сборник конкурсных задач по математике. – СПб.: СМИО Пресс, 2003.
4. Гурский И.П. Функции и построение графиков. – М.: Просвещение, 1961.
5. Калнин Р.А. Алгебра и элементарные функции. – М.: Наука, 1975.
6. Кутепов А.К., Рубанов А.Т. Задачник по алгебре и элементарным функциям. – М.: В.Ш., 1974.
7. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990.
8. Ларичев П.А. Сборник по алгебре 6-8 классы. – М.: Просвещение, 1971.
9. Прилепко А.И. Сборник задач для поступающих в ВУЗы. М.: В.Ш., 1989.
10. Сканави М.И. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во ВТУЗы. – М.: В.Ш., 1969.
11. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск: В.Ш., 1965.
12. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. – М.: Просвещение, 1972.