ГОУ Лицей № 229
Адмиралтейского района Санкт-Петербурга

РЕФЕРАТ по математике

Тема: «Леонард Эйлер»

Выполнил: ученик 10э класса
Семенов Дмитрий

Учитель: **Креславская Е. М.**

Санкт-Петербург

2008

Биография

Леонард Эйлер родился в апреле 1707 года в Швейцарии в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Образование получил сначала у отца (который в молодости занимался математикой под руководством Я.Бернулли), затем поступил (осенью 1720 года) в Базельский университет.

В Петербурге (где Эйлер жил в 1727-1741 и с 1766 до конца жизни) Эйлер нашёл весьма благоприятные условия для научной деятельности. Эйлер сразу приступил к занятиям математикой и механикой. Эйлер участвовал во многих направления деятельности академии. Он читал лекции студентам академического университета, написал общедоступное "Руководство к арифметике", участвовал в различных технических экспертизах.

В 1741 году Эйлера принял предложение прусского короля переехать в Берлин. Живя в Берлине, Эйлер не переставал интенсивно работать для Петербургской АН, сохраняя звание её почётного члена. Он вёл с Петербургом обширную научную переписку, в частности переписывался с М.В.Ломоносовым, которого высоко ценил. Он деятельно участвовал в подготовке русских математиков; в Берлин командировались для занятий под его руководством будущие академики С.К.Котельников, С. Я. Румовский и М.Софронов. Большую помощь Эйлер оказывал Петербургской академии наук, приобретая для неё научную литературу и оборудование, ведя переговоры с кандидатами на должности в академии и т.д.

17 июля 1766 года он вместе с семьёй вернулся в Петербург. Несмотря на преклонный возраст и постигшую его почти полную слепоту, работоспособность его не снизилась. Благодаря сохранившейся силе ума и феноменальной памяти Эйлер смог до конца жизни по-прежнему продуктивно работать. За 17 лет вторичного пребывания в Петербурге им было подготовлено около 400 работ, среди них несколько больших книг. В 1776 году он был одним из экспертов проекта одноарочного моста через Неву, предложенного И.П.Кулибиным, и из всей комиссии один оказал широкую поддержку выдающемуся русскому изобретателю.

Заслуги Эйлера как крупнейшего учёного и организатора научных исследований получили высокую оценку ещё при его жизни. Помимо Петербургской и Берлинской академии, он состоял членом крупнейших научных обществ: Парижской АН, Лондонского королевского общества и т.д. В различных научных конкурсах работы Эйлер неоднократно удостаивался премий.

Эйлер скончался в Петербурге и был похоронен на смоленском кладбище. В 1837 году Петербургская АН воздвигла на его могиле памятник; в 1956 году его прах был перенесён в ленинградский некрополь.

Необыкновенно широк был круг занятий Эйлера, охвативших все отделы современной ему математике и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку и т.д. Около 3/5 работ Эйлера относится к математике, остальные 2/5 преимущественно к её приложениям. В этом

соотношении нашла выражение тесная связь математических исследований Эйлера с практикой. Математику он разрабатывал в значительной части как аппарат естествознания, особенно механики и техники. Эйлер является основоположником теории специальных функций. Он первым начал рассматривать синус и косинус как функции, а не как отрезки в круге.

П. Л. Чебышёв писал: «Эйлером было положено начало всех изысканий, составляющих общую теорию чисел». Большинство математиков XVIII века занимались развитием анализа, но Эйлер пронёс увлечение древней арифметикой через всю свою жизнь. Благодаря его трудам интерес к теории чисел к концу века возродился.

Эйлер продолжил исследования Ферма, ранее высказавшего ряд разрозненных гипотез о натуральных числах. Эйлер строго доказал эти гипотезы, значительно обобщил их и объединил их в содержательную теорию чисел.

Он опроверг гипотезу Ферма о том, что все $F_n = 2^{2^n} + 1$ числа вида - простые; оказалось, что F_5 делится на 641.

Эйлер доказал утверждение Ферма о представлении нечётного простого числа в виде суммы двух квадратов: «*Для того, чтобы нечётное простое число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно при делении на 4 давало в остатке 1*».

Так, Эйлер доказал ряд утверждений, высказанных Ферма, доказал т. н. **тождество Эйлера**, связывающее простые числа со всеми натуральными.

Произведение сумм четырёх квадратов является суммой четырёх квадратов.

Действительно:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) =$$

$$= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2$$

Эйлера - математика нередко характеризуют как гениального "вычислителя". Действительно, он был непревзойдённым мастером формальных выкладок и преобразований, в его трудах многие математические формулы и символика впервые получают современный вид . Он внёс в науку ряд глубоких идей. По выражению П. Лапласса, Эйлер явился общим учителем математиков 2-й половины 18 века. Русские математики высоко ценили творчество Эйлера, а деятели чебышевской школы видели в Эйлере своего идейного предшественника в его постоянном чувстве конкретности, в интересе к конкретным трудным задачам, требующим развития новых методов, в стремлении получать решения задач в форме законченных алгоритмов, позволяющих находить ответ с любой требуемой степенью точности.

«Формула Эйлера»

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин. Занесём результаты в таблицу № 1.

Правильный многогранник	**Число**		
	граней	**вершин**	**рёбер**
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Анализируя таблицу № 1, возникает вопрос: «Нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?» По-видимому, нет. Например, в столбце «грани» казалось бы, просматривается закономерность (4 + 2 = 6, 6 + 2 = 8), но затем намеченная закономерность нарушается (8 + 2 ? 12, 12 + 2 ? 20).

В столбце «вершины» нет даже стабильного возрастания. Число вершин то возрастает (от 4 до 8, от 6 до 20), а то и убывает (от 8 до 6, от 20 до 12) .

В столбце «рёбра» закономерности тоже не видно. Но можно рассмотреть сумму чисел в двух столбцах, хотя бы в столбцах «грани» и «вершины» (Г + В).

Правильный многогранник	**Число**	
	граней и вершин (Г + В)	**рёбер (Р)**
Тетраэдр	4 + 4 = 8	6
Куб	6 + 8 = 14	12
Октаэдр	8 + 6 = 14	12
Додекаэдр	12 + 20 = 32	30
Икосаэдр	20 + 12 = 32	30

Вот теперь закономерности может не заметить только «слепой». Сформулируем её так: «Сумма числа граней и вершин равна числу рёбер, увеличенному на 2 », т.е.

Г + В = Р + 2

Итак, мы вместе «открыли» формулу, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее вновь открыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она носит. Формула Эйлера верна для любых выпуклых многогранников.

<u>Теорема Эйлера и следствие из неё</u>

Теорема Эйлера говорит о соотношении между количеством вершин, ребер и граней многогранника. Она впервые появилась в журнале Петербургской Академии наук в работах Леонарда Эйлера "Элементы учения о телах" и "Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями".

Теорема Эйлера:

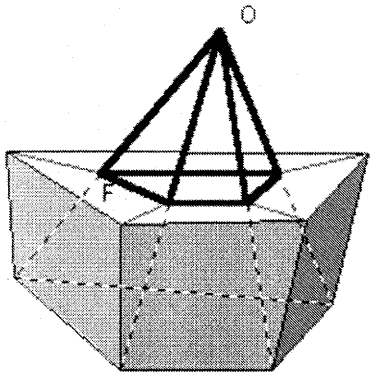
Пусть В - число вершин выпуклого многогранника, Р - число его ребер и Г - число граней. Тогда верно равенство

В - Р + Г = 2

Число **х = В - Р + Г** называется *эйлеровой характеристикой* многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлеровая характеристика равна 2 для многих многогранников, видно из следующей таблицы:

Многогранник	**В**	**Р**	**Г**	**х**
тетраэдр	4	6	4	2
куб	8	12	6	2
n-угольная пирамида	n +1	2n	n +1	2
n-угольная призма	2n	3n	n +2	2

Имеется много доказательств теоремы Эйлера. В одной из них используется формула для суммы углов многоугольника. Рассмотрим это доказательство.



Возьмем снаружи многогранника точку О вблизи от какой-либо грани F и спроектируем остальные грани на F из центра О. Их проекции образуют разбиение грани F на многоугольники. Подсчитаем двумя способами сумму α углов всех полученных многоугольников и самой грани F.

Сумма углов n-угольника равна $\pi(n - 2)$. Сложим эти числа для всех граней (включая грань F).

Сумма членов вида πn равна общему числу сторон всех граней, т.е. 2Р - ведь каждое из Р рёбер принадлежит двум граням. А так как у нас всего Г слагаемых, $\alpha = \pi(2Р - 2Г)$.

Теперь найдем сумму углов при каждой вершине разбиения и сложим эти суммы. Если вершина лежит внутри грани F, то сумма углов вокруг нее равна 2π. Таких вершин B-k, где k- число вершин самой грани F, а значит, их вклад в равен $2\pi(B - k)$.

Углы при вершинах F считаются в сумме дважды (как углы F и как углы многоугольников разбиения); их вклад равен $2\pi(k - 2)$.

Таким образом, $\alpha = 2\pi(B - k) + 2\pi(k - 2) = 2\pi(B - 2)$.

Приравнивая два результата и сокращения на 2π, получаем требуемое равенство Р - Г = В - 2.

Следствие из теоремы Эйлера

Теорема Эйлера играет огромную роль в математике. С её помощью было доказано огромное количество теорем. Находясь в центре постоянного внимания со стороны математиков, теорема Эйлера получила далеко идущие обобщения. Более того, эта теорема открыла новую главу в математике, которая называется *топологией*.

Во время работы над своей теоремой Эйлер вывел из неё несколько утверждений, относящихся к выпуклым многогранникам:

1. $Р + 6 \leq 3В$ и $Р + 6 \leq 3Г$
2. $Г + 4 \leq 2В$ и $В + 4 \leq 2Г$
3. У всякого многогранника есть хотя бы одна треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань, а также хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол;
4. Сумма плоских углов всех граней многогранника равна $2\pi В - 4\pi$.

Докажем одно из следствий, например, (4).

Доказательство:

Обозначим через $Г_i$ число i-угольных граней в многограннике М. Ясно, что

$$Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \ldots \quad (1)$$

Ясно также, что каждая i-угольная грань содержит i ребер многогранника. С другой стороны, каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум граням. Поэтому в сумме $3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$ каждое ребро многогранника подсчитано, причем подсчитано дважды. Отсюда имеем

$$2Р = 3\,Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots \quad (2)$$

Рассмотрим теперь сумму S плоских углов многогранника:

$$S = Г_3 \cdot \pi + Г_4 \cdot 2\pi + \ldots + Г_i \cdot (\,i - 2\,)\pi + \ldots \quad (3)$$

С учетом соотношений (1) и (2) и теоремы Эйлера соотношение (3) можно переписать так:

$$S = Г_3\,(\,3 - 2\,)\pi + Г_4\,(4 - 2\,)\pi + Г_i\,(\,i - 2\,)\pi + \ldots = 2Р\pi - 2Г\pi = 2В\pi - 4\pi.$$

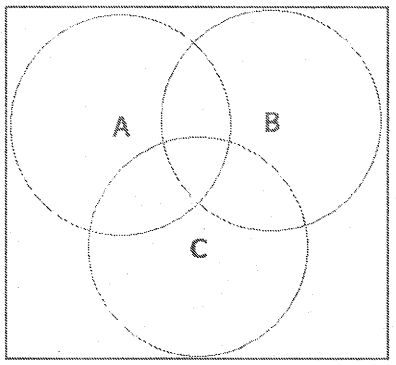
Утверждение (4) доказано.

Как отмечал Эйлер в одной из своих работ, многоугольники на плоскости можно классифицировать по числу сторон (или, что все равно, по числу вершин): треугольники, четырехугольники и т. д., в то время как аналогичный вопрос описания многогранников оказывается гораздо сложнее. Теорема Эйлера помогает немного разобраться в этом вопросе.

Например, из теоремы Эйлера, можно вывести, что *если все грани выпуклого многогранника есть треугольники, причем в некоторых вершинах они сходятся по шесть, а во всех остальных по пять граней, то вершин, в которых сходятся пять граней, будет ровно двенадцать.* Естественно спросить, а сколько при этом у многогранника вершин, в которых встречается шесть многоугольников. Канадский математик Бранко Грюнбаум обнаружил, что при тех же предположениях число вершин, в которых встречается шесть треугольных граней, может быть любым, кроме единицы.

«Круги Эйлера»

Для изображения множеств и соотношений между ними используются специальные диаграммы – диаграммы Эйлера. Напомним, что каждое множество изображается на такой диаграмме в виде круга (или любой другой геометрической фигуры):



Все круги находятся внутри прямоугольника, который символизирует некоторое объемлющее множество (так называемый универсум). Все изображенные на диаграмме множества являются его подмножествами.

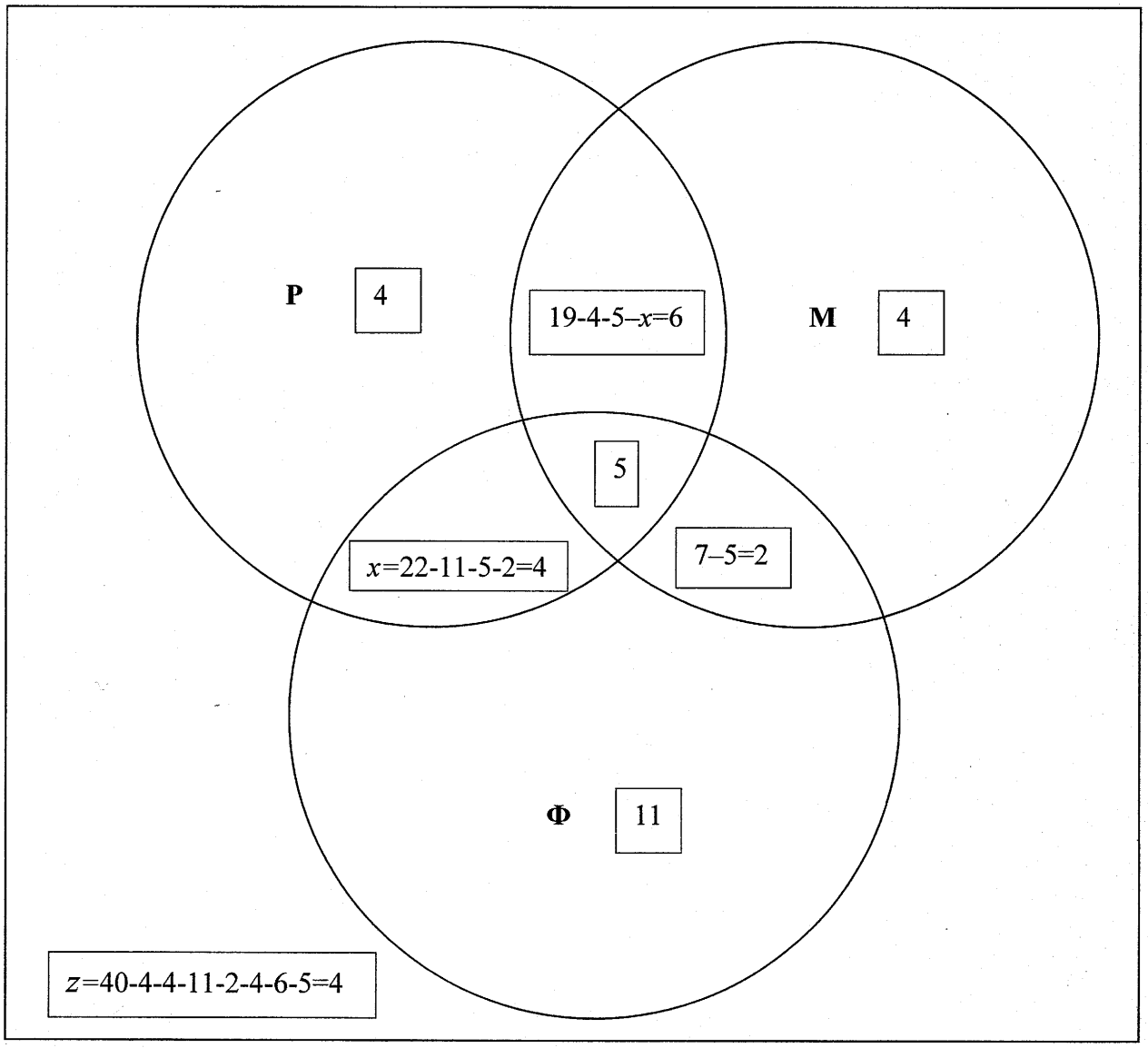
«Круги Эйлера» помогают сегодня решить логические задачи. В одной из своих работ Эйлер писал, что круги «очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления».

Задача: В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют "3" 19 человек, по математике - 17 человек и по физике - 22 человека. Только по одному предмету имеют "тройки": по русскому языку - 4 человека, по математике - 4 человека и по физике - 11 человек. Семь человек имеют "тройки" и по математике и по физике, из них пятеро имеют тройки по русскому языку. Сколько человек учатся без троек? Сколько человек имеют тройки по двум из трёх предметов?

Решение:

- Воспользуемся кругами Эйлера.
- Пусть большой круг изображает всех учащихся класса, а три меньших круга P, M и Φ изображают соответственно троечников по русскому, математике и физике.
- Тогда фигура Z, общая часть кругов P, M и Φ, изображает ребят, имеющих «3» по всем трем предметам, их 5.
- Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что по 2 предметам - математике и физике «3» имеют 7-5=2 ученика;
- по 2 предметам – русскому языку и физике «3» имеют 22-11-5-2=4 ученика;
- по 2 предметам - математике и русскому языку «3» имеют 19-4-5-4=6 учеников;
- Обозначим z - количество учеников, которые учатся без «3».
- Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы ребят; количества ребят в каждой группе обведены на рисунке рамочкам: $z + 4 + 4 + 11 + 5 + 2 + 4 + 6 = 40$
- $z = 40 – 36 = 4$ ученика учатся без «3».
- Складывая числа 2, 4 и 6, найдем количество ребят, учащихся с «3» по двум предметам: 2 + 4 + 6 = 12 учеников.

- **Ответ.**
- 4 ученика учатся без «3».
- 12 учеников с «3» по двум предметам.



Вклад в науку

Математический анализ

Одна из главных заслуг Эйлера перед наукой — монография «Введение в анализ бесконечно малых» (1748). В 1755 году выходит дополненное «Дифференциальное исчисление», а в 1768—1770 годах — три тома «Интегрального исчисления». В совокупности это фундаментальный, хорошо иллюстрированный примерами курс, с продуманной терминологией и символикой, откуда многое перешло и в современные учебники.

Основание натуральных логарифмов было известно ещё со времён Непера и Бернулли, однако Эйлер дал настолько глубокое исследование этой важнейшей константы, что с тех пор она носит его имя. **Число Эйлера** — основание натурального логарифма, иррациональное число $\boldsymbol{e}$.

Современное определение показательной, логарифмической и тригонометрических функций — тоже его заслуга.

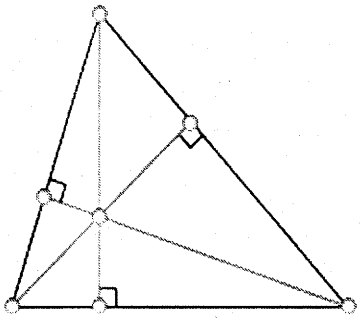
Большое впечатление на математический мир произвели ряды, впервые просуммированные Эйлером, в том числе не поддававшийся до него никому *ряд обратных квадратов*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

Геометрия

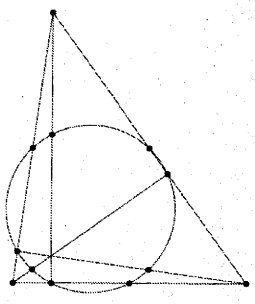
В элементарной геометрии Эйлер обнаружил несколько фактов, не замеченных Евклидом:

- Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (*ортоцентре*).



Ортоцентр (от греч. ορθοξ — прямой) — точка пересечения высот треугольника или их продолжений. Традиционно обозначается латинской буквой *H*. В зависимости от вида треугольника ортоцентр может находиться внутри треугольника (в остроугольных), вне его (в тупоугольных) или совпадать с вершиной (в прямоугольных — совпадает с вершиной при прямом угле).

- Основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности (***окружности Эйлера***).



Комбинаторика

Эйлер исследовал алгоритмы построения магических квадратов методом обхода шахматным конем. Задача о нахождении маршрута шахматного коня, проходящего через все поля доски по одному разу - известна по крайней мере с XVIII века. Эйлер посвятил ей большую работу «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию» (1757 год). В письме к Гольдбаху он сообщал: *«...Я нашел, наконец, ясный способ находить сколько угодно решений (число их, однако, не бесконечно), не делая проб.»* Помимо рассмотрения задачи для коня, Эйлер разобрал аналогичные задачи и для других фигур.

Метод Эйлера

Метод Эйлера состоит в том, что сначала конь двигается по произвольному маршруту, пока не исчерпает все возможные ходы. Затем оставшиеся непройденными клетки добавляются в сделанный маршрут, после специальной перестановки его элементов.

Рассмотрим в качестве примера следующий маршрут:

57	54	29	40	27	44	19	22
52	39	56	43	30	21	26	45
55	58	53	28	41	18	23	20
38	51	42	31	8	25	46	17
59	32	37	a	47	16	9	24
50	3	60	33	36	7	12	15
1	34	5	48	b	14	c	10
4	49	2	35	6	11	d	13

Сначала попытаемся из незамкнутого маршрута сделать замкнутый. Для этого рассмотрим, откуда можно пойти с полей 1 и 60. С поля 1 можно пойти на поля 2, 32 и 52, а с 60 - на 29, 51 и 59. В этих двух наборах есть поля, различающиеся на единицу, а именно - 51 и 52. Благодаря этому можно сделать маршрут замкнутым, обратив его часть. Для этого перенумеруем поля с 52 по 60 в обратном порядке.

После этого у нас получается замкнутый маршрут:

55	58	29	40	27	44	19	22
60	39	56	43	30	21	26	45
57	54	59	28	41	18	23	20
38	51	42	31	8	25	46	17
53	32	37	a	47	16	9	24
50	3	52	33	36	7	12	15
1	34	5	48	b	14	c	10
4	49	2	35	6	11	d	13

Теперь можно включить в маршрут некоторые из непройденных клеток. Так как наш маршрут замкнутый, то его можно разорвать в произвольном месте и к одному из концов прицепить подходящую цепочку из непройденных клеток. Например, если разорвать цепочку в клетке 51 (перенумеровав клетки и сделав её последней, а 52 - первой), то сможем удлинить нашу цепочку на клетки a, b и d, которые станут клетками 61, 62 и 63.

Заключение

Эйлер оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. С точки зрения математики, XVIII век — это век Эйлера. Если до него достижения в области математики были разрознены и не всегда согласованы, то Эйлер впервые увязал анализ, алгебру, тригонометрию, теорию чисел и др. дисциплины в единую систему, и добавил немало собственных открытий. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру».

Биографы отмечают, что Эйлер был виртуозным алгоритмистом. Он неизменно старался довести свои открытия до уровня конкретных вычислительных методов.

Использованная литература

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. — М.: Просвещение, 1964.
2. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках..
3. Яковлев А. Я. Леонард Эйлер. — М.: Просвещение, 1983.
4. Белл Э. Т. Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979.
5. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — 3-е изд., расш. — М.: МЦНМО, 2001.
6. Делоне Б. Н. Леонард Эйлер // Квант. — 1974. — № 5.
7. Математика XVIII столетия / Под редакцией А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1972. — Т. 3. — (История математики в 3-х томах).
8. Полякова Т. С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. — КомКнига, 2007.
9. Юшкевич А. П. История математики в России. — М.: Наука, 1968.